На правах рукописи

СТРЕЛЬЦОВА Ирина Станиславовна

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ В КЛАССИЧЕСКИХ ДВУМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

01.01.04 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Казань — 2012

Работа выполнена на кафедре высшей математики ФГБОУ ВПО «Астраханский государственный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Кушнер Алексей Гурьевич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Лычагин Валентин Васильевич**
	доктор физико-математических наук, профессор **Толстихина Галина Аркадьевна**
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 24 мая 2012 года в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008 г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37, ауд. 337 НИИММ им. Н. Г. Чеботарева.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «____» ______________ 2012 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент

Липачев Е. К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В Эрлангенской программе [1] Феликс Клейн предложил единый подход к описанию различных геометрий. Согласно этой программе, одной из основных задач геометрии является построение инвариантов геометрических объектов относительно действий групп. Такой подход во многом опирается на идеи Софуса Ли, который ввел в геометрию непрерывные группы преобразований, известные сейчас как группы Ли. В частности, при рассмотрении классификационных задач и проблем эквивалентности в дифференциальной геометрии следует рассматривать дифференциальные инварианты относительно действия групп Ли. Тогда проблема эквивалентности геометрических объектов сводится к нахождению полной системы скалярных дифференциальных инвариантов.

Понятия дифференциального инварианта и инвариантного дифференцирования, введенные Софусом Ли [2], являются основными понятиями при классификации геометрических объектов. С точки зрения геометрии пространств джетов [3], дифференциальный инвариант порядка k группы Ли G — это функция на пространстве k-джетов, инвариантная относительно продолженной группы Ли $G^{(k)}$.

Дифференциальные инварианты образуют подалгебру алгебры функций на пространстве джетов. В зависимости от рассматриваемой геометрии, порядки первых нетривиальных дифференциальных инвариантов могут быть различны. Например, в пространстве $\mathbb{R}^3$, снабженном евклидовой метрикой, кривизна и кручение кривой представляют собой дифференциальные инварианты второго и третьего порядка соответственно, а первый дифференциальный инвариант кривой на плоскости относительно проективных преобразований имеет седьмой порядок.

На алгебре дифференциальных инвариантов действуют дифференциальные операторы первого порядка — так называемые инвариантные дифференцирования. Это операторы, коммутирующие с продолжениями элементов соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}$. Например, дифференцирование $\frac{d}{ds}$, где s — натуральный параметр кривой, является инвариантным диффе-

[1] Клейн, Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований (“Эрлангенская программа”). В кн. А.П. Норден: Об основаниях геометрии. – 1872. – С. 399–434.

[2] Lie, S. Vorlesungen über differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen transformationen. – Vol. 1–3, Leipzig, 1891–1896.

[3] Алексеевский, Д.В., Виноградов, А.М., Лычагин, В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1988. – Т. 28. – 297 с.

ренцированием относительно группы Ли движений. Инвариантным дифференцированием относительно группы Ли проективных преобразований плоскости является дифференцирование Штуди [4].

Как правило, с помощью инвариантных дифференцирований из уже известных дифференциальных инвариантов можно получать новые. При этом важную роль играет теорема Ли-Трессе, утверждающая, что существует конечное число базисных дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференцирований, таких, что любой инвариант выражается через базисные инварианты и их инвариантные дифференцирования. Эта теорема является аналогом фундаментальной теоремы алгебраической геометрии — теоремы Гильберта о базисе, утверждающей, что алгебра полиномиальных инвариантов конечно порождена [5].

Скалярные дифференциальные инварианты эффективно используются при решении проблем эквивалентности геометрических объектов. Саму же проблему эквивалентности можно рассматривать как проблему построения полной системы скалярных дифференциальных инвариантов.

Предлагаемая диссертационная работа посвящена описанию алгебр дифференциальных инвариантов кривых и их слоений (одномерных распределений) на плоскости в различных классических геометриях и применению этих алгебр к проблемам эквивалентности.

Степень разработанности проблемы. Существует общий подход к определению кривизн кривых в различных геометриях[6]. Понятие кривизны для плоских кривых приводятся в работах П.А. Широкова и А.П. Широкова[7] — для аффинной группы и ее подгрупп (центроаффинной, эквицентроаффинной и эквиаффинной групп, группы евклидовых подобий), Д.Д. Мордухай-Болтовского[8] и Б.А. Фукса[9] — для геометрии Лобачевского и др. Для нахождения дифференциальных инвариантов кривых Э. Картан применял созданный им метод подвижного репера[10]. Отметим, что метод подвижного репера является альтернативой инфинитезимальному подходу

[4]Konovenko, N., Lychagin, V. On projective classification of plane curves // Global and Stochastic Analysis. Vol. 1. – No. 2, December 2011. – P. 241–264.

[5]Hilbert, D. Uber dei Theorie des algebraische Formen // Math. Ann. — 36. – P. 473–534, 1890.

[6]Синцов, Д.М. К вопросу о кривизне кривых линий // Изв. Каз. физ.-мат. о-ва (2). – **12**. – №4. – С. 71-84.

[7]Широков, П.А., Широков, А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 320 с.

[8]Мордухай-Болтовской, Д.Д. О кривизне плоских кривых в пространстве Лобачевского // Научн. записки Киевск. гос. ун-та, **10**, вып. 1; Матем. сборник. – Москва. – №5. – С. 43–52.

[9]Фукс, Б.А. Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений. – Москва-Ленинград: ГТТИ, 1951. – 148 с.

[10]Картан, Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. – М.: Изд. Московского университета. – 1963. – 363 с.

С. Ли, который мы использовали в работе.

Для двух плоских кривых вопрос локальной эквивалентности в геометрии Евклида традиционно решается следующим образом.

Пусть $\gamma_1 : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ и $\gamma_2 : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованные регулярные кривые и их кривизны совпадают: $k_1(s) = k_2(s)$ для всех $s \in [0, L]$. Тогда существует такое движение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, сохраняющее ориентацию, что $\gamma_2(s) = \varphi(\gamma_1(s))$ для всех $s \in [0, L]$.

Однако этот критерий имеет один недостаток: для того, чтобы записать натуральное уравнение кривой, необходимо задать натуральный параметр. То есть, в том числе, указать, какая точка кривой отвечает нулевому значению этого параметра. Но натуральный параметр не может быть выбран однозначно: он определен с точностью до преобразования сдвига и выбора ориентации кривой[11]: $s \mapsto \pm s + \mathrm{const}$.

В первой главе настоящей диссертационной работы мы предлагаем конструктивный метод решения проблемы эквивалентности, свободный от этого недостатка, а во второй главе применяем его для решения задачи эквивалентности кривых в различных классических геометриях.

В третьей и четвертой главах мы рассматриваем эквивалентность слоений кривых на плоскости в различных классических геометриях.

Цель и задачи диссертационного исследования. Целью настоящей диссертационной работы является решение локальной проблемы эквивалентности кривых и слоений кривых на плоскости относительно структурных групп, отвечающих различным классическим геометриям: Евклида, Минковского, Лобачевского, де Ситтера, а также конформной. В каждой из рассматриваемых задач построена полная система скалярных дифференциальных инвариантов, указаны инвариантные дифференцирования и доказаны теоремы эквивалентности.

Перечислим основные задачи исследования:

1) Построить алгебры скалярных дифференциальных инвариантов кривых и слоений кривых на плоскости относительно групп движений в геометриях Евклида, Минковского, Лобачевского, де Ситтера и конформной.

2) В терминах построенных инвариантов найти необходимые и достаточ-

[11] Бляшке, В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – Т. 1. – 330 с.

ные условия локальной эквивалентности кривых и слоений кривых.

Объектом исследования являются кривые и слоения кривых (т.е. одномерные распределения) на плоскости.

Теоретическую и методологическую основу исследования составляют методы современной дифференциальной геометрии, теории дифференциальных инвариантов и геометрии пространств джетов[12]. Мы также используем теорию симметрий дифференциальных уравнений и вполне интегрируемых распределений, а также некоторые результаты из геометрической теории дифференциальных уравнений. При проведении расчетов были использовали пакеты DifferentialGeometry и JetCalculus, созданные профессором Яном Андерсоном (I. Anderson) для системы компьютерной алгебры Maple. Мы приносим ему глубокую благодарность.

Научная новизна исследования. Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты.

1) Для групп Ли собственных движений в геометриях Евклида, Минковского и их $\mathbb{R}$-конформных аналогов, а также в геометриях Лобачевского и де Ситтера построены алгебры дифференциальных инвариантов кривых и слоений кривых на плоскости. Указаны инвариантные дифференцирования, отвечающие этим группам Ли.

2) В терминах найденных алгебр дифференциальных инвариантов найдены условия локальной (а в случае аналитических кривых — и глобальной) эквивалентности кривых и слоений кривых на плоскости.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический и прикладной характер. Они могут быть использованы для дальнейшего изучения геометрии кривых и слоений, в том числе и кривых в многомерных пространствах. Результаты могут быть использованы при решении задач распознавания изображений.

Построенные дифференциальные инварианты можно использовать для описания как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравне-

[12] Vinogradov, A.M., Krasil'shchik, I.S., Lychagin, V.V. Geometry of jet spaces and nonlinear partial differential equations. Advanced Studies in Contemporary Mathematics. – **1**. – New York: Gordon and Breach Science Publishers. – 1986.–xx+441 P.

ний в частных производных, допускающих заданную группу симметрий. Это позволяет применить методы группового анализа[13] для их интегрирования.

Автором диссертации составлен комплекс программ для системы компьютерной алгебры Maple для вычисления дифференциальных инвариантов любого порядка и для решения проблем эквивалентности.

Результаты работы были частично использованы при чтении курса "Дополнительные главы теории дифференциальных уравнений" для студентов, обучающихся по специальности "Математика с дополнительной специальностью" в Астраханском государственном университете, что подтверждается актом внедрения.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:

— на семинаре по дифференциальной геометрии под руководством профессора В.В. Шурыгина (Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 26 мая 2011 г.);

— на семинаре по геометрии дифференциальных уравнений (Москва, Институт проблем управления РАН, апрель 2011 г.);

— на Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2007" (Одесса, Украина, 21–26 мая 2007 г.);

— на II Международном семинаре "Симметрии: теоретический и методический аспекты" (Астрахань, Астраханский государственный университет, 11–14 сентября 2007 г.);

— на Международной конференции "Геометрия в Астрахани – 2007" (Астрахань, Астраханский государственный университет, 11–14 сентября 2007 г.);

— на Шестой молодежной научной школе–конференции "Лобачевские чтения – 2007" (Казань, Казанский государственный университет, 16–19 декабря 2007 г.);

— на Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2008" (Одесса, Украина, 19–24 мая 2008 г.);

[13] Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: "Наука", 1978. – 399 с.

— на Международной конференции “Геометрия в Астрахани – 2008” (Астрахань, Астраханский государственный университет, 18–24 августа 2008 г.);

— на научной конференции “Геометрия – наука и учебный предмет” (Москва, Московский государственный областной университет, май 2008 г.);

— на Международной конференции “Диффернециальные уравнения и топология”, посвященной 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (МГУ им. М. В. Ломоносова – Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, Москва, 17–22 июня 2008 г.);

— на Седьмой молодежной научной школе–конференции “Лобачевские чтения – 2008” (Казань, Казанский государственный университет, 1–3 декабря 2008 г.);

— на Международной конференции “Геометрия в Одессе – 2009” (Одесса, Украина, 25–30 мая 2009 г.);

— на Международной научной конференции “Лаптевские чтения”, посвященной 100-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева (МГУ им. М. В. Ломоносова – Тверской государственный университет, Москва–Тверь, 25–29 августа 2009 г.);

— на III Международном семинаре “Симметрии: теоретический и методический аспекты” (Астрахань, Астраханский государственный университет, 10–14 сентября 2009 г.);

— на Международной конференции “Геометрия в Астрахани – 2009” (Астрахань, Астраханский государственный университет, 10–16 сентября 2009 г.);

— на Восьмой молодежной научной школе–конференции “Лобачевские чтения – 2009” (Казань, Казанский государственный университет, 1–6 ноября 2009 г.);

— на Международной конференции “Геометрия в Одессе – 2010” (Одесса, Украина, 24–30 мая 2010 г.);

— на Международной конференции “Геометрия в Кисловодске–2010” (Кисловодск, Кисловодский гуманитарно-технический институт, 13–20 сентября 2010 г.);

— на Международной школе-конференции для молодежи “Геометрия. Управление. Экономика” (Астрахань, Астраханский филиал Волжской государственной академии водного транспорта, 15–27 августа 2011 г.).

— на Десятой молодежной научной школе–конференции “Лобачевские чтения – 2011” (Казань, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 31 октября – 4 ноября 2011 г.).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 7 статей (из них 3 — в журналах, рекомендованных ВАК [S1–S3], 2 — в реферируемых научных журналах [S4, S7], 2 — в сборниках научных трудов [S5, S6]) и 15 тезисов докладов [S8–S22].

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. В соавторстве выполнены 2 работы. Вклад автора в них составляет 50%.

Структура и объём работы. Диссертация изложена на 138 страницах, состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, содержащего 59 наименований, и приложения, содержащего листинг программы для Maple. Диссертация содержит 3 таблицы и 5 рисунков.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** дана общая характеристика работы и сформулированы цели и задачи диссертационного исследования, приводятся основные результаты.

В **первой главе** “Дифференциальные G-инварианты кривых” приведены основные определения и результаты, необходимые в дальнейшем. В частности, даны определения пространства джетов, распределения Картана, указываны способ продолжения преобразований плоскости в пространства k-джетов и метод вычисления размерностей алгебр дифференциальных инвариантов.

Пусть G — связная группа Ли, действующая транзитивно на открытой области $M \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathcal{G}$ — соответствующая ей алгебра Ли. Их продолжения на многообразие k-джетов $J^k(\mathbb{R})$ будем обозначать $G^{(k)}$ и $\mathcal{G}^{(k)}$ соответственно. Мы задаем кривые как графики гладких функций: $s_f = \{y = f(x)\} \subset M$.

Функция J на пространстве $J^k(\mathbb{R})$, гладкая в своей области определения, называется *G-дифференциальным инвариантом* порядка $\leq k$, если она сохраняется под действием k-го продолжения группы Ли G, то есть $\left(\phi^{(k)}\right)^*(J) = J$ для любого преобразования $\phi \in G$.

Дифференцирование вида $\nabla = \lambda \dfrac{d}{dx}$ называется *G-инвариантным дифференцированием*, если оно коммутирует с продолжениями векторных полей $X \in \mathcal{G}$. Здесь λ — гладкая функция на пространстве джетов и $\frac{d}{dx}$ — оператор полного дифференцирования.

Пусть J_k — первый нетривиальный дифференциальный G-инвариант порядка k и a — точка на кривой s_f. Точку a будем называть *G-регулярной*, если дифференциал $dJ_k(f)$ не обращается в нуль в этой точке и *G-особой* в противном случае. Кривую s_f, все точки которой G-регулярны, будем называть *G-регулярной*. Для регулярной кривой функцию $J_k(f)$ можно принять за параметр на ней. Заметим, что этот параметр, в отличие от натурального параметра, не предполагает выбор начальной точки на кривой.

Пусть ∇ — инвариантное дифференцирование и $J_{k+1} = \nabla(J_k)$— дифференциальный инвариант порядка $k+1$. Ограничение дифференциального инварианта J_{k+1} на кривую s_f можно представить в виде некоторой функции от параметра $J_k(f)$:

$$J_{k+1}(f) = \Phi_f(J_k(f)). \tag{1}$$

Выражение (1) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $k+1$ относительно функции $f(x)$, которой отвечает подмногообразие $E_f \subset J^{k+1}(\mathbb{R})$.

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. *группа Ли G действует на M транзитивно;*
2. *кривые s_f и s_g регулярны;*
3. *уравнения E_f и E_g не содержат особых точек и могут быть разрешены относитнельно старших производных.*

Кривые s_f и s_g локально G-эквивалентны тогда и только тогда, когда функции Φ_f и Φ_g тождественно равны.

Во **второй главе** “Классификация кривых на плоскости в классических геометриях" указанная схема применена к различным геометриям: Евклида, Минковского, конформной, Лобачевского и де Ситтера. Построена полная система скалярных дифференциальных инвариантов кривых. Основной результат этой главы — теоремы эквивалентности. Для гладких кривых они носят локальный характер, а для аналитических кривых — глобальный. Приведем некоторые результаты.

1. Геометрия Евклида. Дифференциальные инвариант второго порядка (кривизна) и инвариантное дифференцирование имеют вид:

$$J_2^{\mathrm{E}} = \frac{y_2}{(y_1^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad \nabla_{\mathrm{E}} = \frac{1}{\sqrt{y_1^2+1}}\frac{d}{dx}.$$

Дифференциальный инвариант третьего порядка[14]

$$J_3^{\mathrm{E}} = \nabla_{\mathrm{E}}(J_2^{\mathrm{E}}) = \frac{y_3(y_1^2+1) - 3y_1y_2^2}{(y_1^2+1)^3}.$$

Размерность алгебры дифференциальных G_{E}-инвариантов порядка k равна $k-1$. Функциональный базис в алгебре дифференциальных инвариантов порожден кривизной J_2^{E} и оператором ∇_{E}.

Теорема 8. *Пусть на двух регулярных кривых s_f и s_g на плоскости Евклида с метрикой $g_{\mathrm{E}} = dx^2 + dy^2$ функции Φ_f и Φ_g не обращаются в нуль в рассматриваемой окрестности. Кривые s_f и s_g G_{E}-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Phi_f \equiv \Phi_g$.*

2. Геометрия Минковского. Дифференциальные инвариант второго порядка и инвариантное дифференцирование имеют вид:

$$J_2^{\mathrm{M}} = \frac{y_2}{|y_1^2-1|^{\frac{3}{2}}}, \quad \nabla_{\mathrm{M}} = \frac{1}{\sqrt{|y_1^2-1|}}\frac{d}{dx}.$$

Размерность алгебры дифференциальных G_{M}-инвариантов порядка k равна $k-1$. Функциональный базис в алгебре дифференциальных инвариантов порожден кривизной J_2^{M} и оператором ∇_{M}. Множество

$$\Sigma_{\mathrm{M}}^2 = \{1 - y_1^2 = 0, y_2 = 0\} \subset J^2(\mathbb{R})$$

состоит из особых орбит и разбивает пространство $J^2(\mathbb{R})$ на компоненты связности. Дифференциальный инвариант третьего порядка имеет вид:

$$J_3^{\mathrm{M}} = \nabla_{\mathrm{M}}(J_2^{\mathrm{M}}) = \frac{y_3(y_1^2-1) - 3y_1y_2^2}{(y_1^2-1)^3}.$$

[14]Этот дифференциальный инвариант был известен еще Софусу Ли.

Теорема 12. *Пусть на двух регулярных кривых s_f и s_g на плоскости Минковского с метрикой $g_{\mathrm{M}} = dy^2 - dx^2$ выполнены следующие условия:*

1. *функции Φ_f и Φ_g не обращаются в нуль;*

2. *2-джеты кривых s_f и s_g лежат в одной компоненте связности, то есть либо $f', g' < -1$, либо $-1 < f', g' < 1$, либо $1 < f', g'$.*

Кривые s_f и s_g G_{M}-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Phi_f \equiv \Phi_g$.

Деление кривых в геометрии Минковского на классы эквивалентности хорошо известно в специальной теории относительности: это времениподобные и пространственноподобные кривые. Классы кривых на плоскости разделяются двумя прямыми — так называемым "световым конусом".

3. $\mathbb{R}$-конформная геометрия. Преобразование области M будем называть $\mathbb{R}$-*конформным*, если при этом преобразовании метрика умножается на некоторую постоянную[15]. Мы рассматриваем два типа метрик — Евклида и Минковского. Такие преобразования образуют группы Ли G_{CE} и G_{CM} соответственно. Эти группы мы называем $\mathbb{R}$-конформными[16]. Размерности алгебр дифференциальных инвариантов порядка k этих групп равны $k-2$. Укажем первый дифференциальный и инвариантное дифференцирование для группы Ли G_{CE}:

$$J_3^{\mathrm{CE}} = \frac{y_3(y_1^2+1) - 3y_1y_2^2}{y_2^2}, \quad \nabla_{\mathrm{CE}} = \frac{y_1^2+1}{y_2}\frac{d}{dx}.$$

Дифференциальный инвариант J_3^{CE} мы называем $\mathbb{R}$-*конформной кривизной*. Кривые с постоянной $\mathbb{R}$-конформной кривизной являются логарифмическими спиралями.

Дифференциальный инвариант четвертого порядка имеет вид:

$$J_4^{\mathrm{CE}} = -\frac{1+y_1^2}{y_2^4}(3y_2^4 - 2y_2^2y_1y_3 + 2y_3^2 + 2y_1^2y_3^2 - y_2y_4 - y_2y_4y_1^2).$$

Множество $\Sigma_{\mathrm{CE}} = \{y_2 = 0, y_3 = 0\}$ состоит из особых орбит и разбивает пространство $J^3(\mathbb{R})$ на компоненты связности.

Теорема 18. *Пусть на двух G_{CE}-регулярных кривых s_f и s_g функции Φ_f и Φ_g не обращаются в нуль. Кривые s_f и s_g G_{CE}-эквивалентны тогда и только тогда, когда:*

[15] В случае евклидовой метрики дополнительно потребуем, чтобы эта постоянная была положительной

[16] В терминологии П.А. Широкова и А.П. Широкова группа Ли G_{CE} называется "группой евклидовых подобий".

1. *3-джеты кривых лежат в одной компоненте связности;*

2. *функции Φ_f и Φ_g тождественно совпадают: $\Phi_f \equiv \Phi_g$.*

4. Геометрии Лобачевского и де Ситтера. Мы рассматриваем модели геометрий Лобачевского и де Ситтера в верхней полуплоскости с метриками

$$g_{\mathrm{L}} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \text{и} \quad g_{\mathrm{S}} = \frac{dx^2 - dy^2}{y^2}$$

соответственно. Соответствующие группы Ли собственных движений мы обозначим G_{L} и G_{S}. Размерности алгебр дифференциальных инвариантов порядка k равны $k-1$. Функциональный базис в алгебре дифференциальных G_{S}-инвариантов порожден следующими инвариантом и оператором:

$$J_2^{\mathrm{S}} = \frac{y_2 y_0 + y_1^2 - 1}{|y_1^2 - 1|^{\frac{3}{2}}}, \quad \nabla_{\mathrm{S}} = \frac{y_0}{\sqrt{|y_1^2 - 1|}} \frac{d}{dx}.$$

В диссертации доказаны теоремы эквивалентности для регулярных кривых в геометрии Лобачевского и де Ситтера.

В **третьей главе** "Дифференциальные G-инварианты слоений кривых" приводятся необходимые далее определения и результаты и указывается способ вычисления инвариантных дифференцирований. Отметим, что проблема эквивалентности слоений кривых принципиально отличается от проблемы эквивалентности кривых. Причина состоит в следующем. Слоение кривых на плоскости локально можно задать с помощью функции $f \in C^\infty(M)$ $(df \neq 0)$, линии уровня которой совпадают с кривыми слоения. Эта функция определена с точностью до калибровочных преобразований $f \longmapsto F(f)$, где $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция. Поэтому вместо группы Ли преобразований, как это было в случае кривых, здесь нужно рассматривать псевдогруппу Ли, порожденную преобразованиями группы Ли G и калибровочными преобразованиями. Заметим однако, что функция $v = \frac{f_x}{f_y}$, где f_x и f_y — частные производные функции $f = f(x, y)$ по координатам x, y плоскости, является инвариантом относительно калибровочных преобразований. Это позволяет применить перенормировку и рассматривать ее вместо функции f, что дает возможность вместо псевдогруппы Ли рассматривать группу Ли.

Дифференциальный оператор вида

$$\nabla = A_1 \frac{d}{dx} + A_2 \frac{d}{dy},$$

где A_1 и A_2 — гладкие функции на пространстве джетов, будем называть *G-инвариантным дифференцированием*, если он коммутирует с продолжениями векторных полей из соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}$. Два некоммутирующих инвариантных дифференцирования позволяют построить дифференциальные инварианты. Действительно, разложим их коммутатор:

$$[\nabla_1, \nabla_2] = \alpha \nabla_1 + \beta \nabla_2. \tag{2}$$

Теорема 31. *Функции α и β являются G-инвариантами.*

Пусть J_1 и J_2 — два базисных дифференциальных G-инварианта второго порядка слоения s_f и пусть группа Ли G действует на M транзитивно. Слоение s_f будем называть *регулярным* в области $\mathcal{D} \subset M$, если функции $J_1(f)$ и $J_2(f)$ функционально независимы в этой области. Для регулярного слоения s_f функции $J_1(f)$ и $J_2(f)$ могут быть выбраны в качестве новых координат в области $\mathcal{D}$. Ограничения дифференциальных инвариантов $J_{ij} = \nabla_i(J_j)$ на слоение s_f являются функциями от $J_1(f)$ и $J_2(f)$:

$$J_{ij}(f) = \Phi^f_{ij}(J_1(f), J_2(f)). \tag{3}$$

Многообразие в пространстве k-джетов, соответствующие системе (3) обозначим E_f.

Пусть s_g — другое регулярное слоение и пусть функции $\Phi^f_{ij}(J_1(f), J_2(f))$ и $\Phi^g_{ij}(J_1(g), J_2(g))$ не обращаются в нуль.

Теорема 32. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. *группа Ли G действует на M транзитивно;*
2. *E_f и E_g являются уравнениями конечного типа и не содержат особых точек.*

Слоения s_f и s_g локально G-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Phi^f_{ij} \equiv \Phi^g_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$.

В **четвертой главе** “Слоения кривых на плоскости в классических геометриях” результаты, полученные в третьей главе, мы применяем к геометриям Евклида, Минковского, Лобачевского и де Ситтера. В качестве примера рассмотрим две из них.

1. Геометрия Евклида. Операторы

$$\nabla_1 = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\left(-\frac{d}{dx} + v\frac{d}{dy}\right) \quad \text{и} \quad \nabla_2 = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\left(v\frac{d}{dx} + \frac{d}{dy}\right)$$

являются инвариантными дифференцированиями. Применяя формулу (2), получаем два дифференциальных инварианта:

$$J_1 = \frac{vv_y - v_x}{(v^2+1)^{3/2}}, \qquad J_2 = \frac{vv_x + v_y}{(v^2+1)^{3/2}}.$$

Дифференциальные инварианты второго порядка получим, действуя на них операторами ∇_1 и ∇_2: $J_{ij} = \nabla_i(J_j)$, $i = 1, 2$.

Теорема 34. *Размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка $\leq k$ равна $C_{k+2}^k - 1$, причем число независимых дифференциальных инвариантов, порядок которых равен k, равно $k+1$. Все орбиты группы Ли движений являются неособыми.*

Теорема 35. *Базисные дифференциальные инварианты слоения кривых на плоскости Евклида относительно группы G_{E} порождены дифференциальными инвариантами первого порядка J_1 и J_2 и их всевозможными производными по ∇_1 и ∇_2. Между дифференциальными инвариантами второго порядка существует соотношение*

$$J_{12} - J_{21} + J_1^2 + J_2^2 = 0. \tag{4}$$

Соотношения меджу дифференциальными инвариантами более высоких порядков получаются из формулы (4) применением к ней операторов ∇_1 и ∇_2.

Теорема 36. *Регулярные слоения s_f и s_g локально G_{E}-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Phi_{ij}^f \equiv \Phi_{ij}^g$ $(i, j = 1, 2)$.*

2. Геометрия де Ситтера. Операторы

$$\nabla_1 = \frac{y}{\sqrt{1-v^2}}\left(v\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}\right) \quad \text{и} \quad \nabla_2 = \frac{y}{\sqrt{1-v^2}}\left(-\frac{d}{dx} + v\frac{d}{dy}\right)$$

являются G_{S}-инвариантными дифференцированиями. Дифференциальные инварианты первого порядка:

$$J_1 = \frac{v - v^3 + yvv_x - yv_y}{(-1+v^2)^{3/2}}, \qquad J_2 = \frac{yvv_y + v^2 - 1 - yv_x}{(-1+v^2)^{3/2}}.$$

Теорема 46. *Размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка $\leq k$ равна $\nu(k) = C_{k+2}^k - 1$, причем число независимых дифференциальных инвариантов, порядок которых равен k, равно $k+1$. Среди орбит действия группы Ли G_{S} есть особые:*

$$\Sigma^2 = \{v = \pm 1, v_x = 0, v_y = 0, v_{yy} = v_{xx}, v_{xy} = \pm v_{xx}, \} \subset J^2(\pi).$$

Множество Σ^2 делит пространство 2-джетов на компоненты связности.

Теорема 47. *Пусть 2-джеты регулярных слоений s_f и s_g принадлежат одной и той же компоненте связности. Тогда эти слоения локально G_{S}-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Phi^f_{ij} \equiv \Phi^g_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$.*

В **Приложении 1** приводятся листинги компьютерных программ для вычисления дифференциальных инвариантов и нахождения кривых с постоянной кривизной.

Методы, разработанные в диссертации, можно применить и к другим задачам классификации и эквивалентности геометрических объектов. Например, к проблеме эквивалентности пространственных кривых или тканей на плоскости, а также к классификации кривых и слоений относительно псевдогрупп Ли.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

S1. Стрельцова, И.С. $\mathbb{R}$-конформные инварианты кривых [Текст] / И.С. Стрельцова // Изв. ВУЗов. Математика. – 2009. – №5. – С. 78–81.

S2. Стрельцова, И.С. Классификация 4-тканей на плоскости относительно проективных преобразований [Текст] / И.С. Стрельцова // Естественные науки. – 2011. – №2. – С. 203–209.

S3. Стрельцова, И.С. Дифференциальные инварианты кривых на двумерных многообразиях [Текст] / И.С. Стрельцова // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. – 2011. – №26. – С. 209–217.

Публикации в других изданиях

S4. Кузаконь, В.М. Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского [Текст] / В.М. Кузаконь, И.С. Стрельцова // Математичні методи та фізико-механічні поля. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача. – Львів, 2007. – Т. 50. – №4. – С. 49–54.

S5. Кузаконь, В.М. Расслоения кривых на плоскости Минковского [Текст] / В.М. Кузаконь, И.С. Стрельцова. – Сборник научных трудов II Международного семинара “Симметрии: теоретический и методический аспекты”. – Астрахань, 2007. – С. 53–58.

S6. Стрельцова, И.С. Структура алгебры скалярных дифференциальных инвариантов кривых и конформная кривизна [Текст] / И.С. Стрельцова. – Доклады конференции “Геометрия – наука и учебный предмет”. Под ред. Мантурова О.В. Московский государственный областной университет, май 2008 г. – С. 79-83.

S7. Стрельцова, И.С. $\mathbb{R}$-конформная геометрия кривых на плоскости: алгебра дифференциальных инвариантов [Текст] / И.С. Стрельцова // Геометрія, топологія та їх застосування. Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6. – №2. – С. 235-246.

S8. Streltsova, I. Invariants of curves bundles on the Minkovsky plane [Текст] / I. Streltsova // Abstracts of the International Conference “Geometry in Odessa – 2007”. Odessa, Ukraine, 21–26 May 2007. – P. 154–155.

S9. Streltsova, I. Curves bundles on the Minkovsky plane [Текст] / I. Streltsova // Abstracts of the Second Internationa Workshop “Symmetry: its theoretical and methodical aspects”. Astrakhan, 11–14 September 2007. – P.103.

S10. Стрельцова, И.С. Алгебры дифференциальных инвариантов кривых на двумерных многообразиях [Текст] / И.С. Стрельцова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2007. – Т. 36. – С. 207–209.

S11. Стрельцова, И.С. R-конформные инварианты кривых [Текст] / И.С. Стрельцова // Тезисы докладов Международной конференции “Геометрия в Одессе – 2008”. Одесса, Украина, 19–24 мая 2008 г. – С. 129–130.

S12. Стрельцова, И.С. Конформная геометрия кривых на плоскости [Текст] / И.С. Стрельцова // Тезисы докладов Международной конференции “Геометрия в Астрахани - 2008”. Астрахань,18–24 августа 2008 г. – С. 50–51.

S13. Streltsova, I. Conformal differential invariants of curves and ordinary differential equations [Текст] / I. Streltsova // Abstracts of the International Conference "Differential equations and topology". Moscow, June 17–22, 2008. – P. 78–79.

S14. Стрельцова, И.С. Инварианты кривых в геометриях Лобачевского и де Ситтера [Текст] / И.С. Стрельцова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2008. – Т. 37. – С. 169–171.

S15. Стрельцова, И.С. Алгебра конформных скалярных дифференциальных инвариантов в $\mathbb{R}^3_\varepsilon$ [Текст] / И.С. Стрельцова // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2009". Одесса, Украина, 25–30 мая 2009 г. – С. 73.

S16. Стрельцова, И.С. Дифференциальные инварианты кривых и интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / И.С. Стрельцова // Тезисы докладов Международной научной конференции "Лаптевские чтения – 2009". Москва-Тверь, 25–28 августа 2009 г. – С. 33.

S17. Стрельцова, И.С. Алгебра дифференциальных инвариантов кривых в пространствах Лобачевского и де Ситтера [Текст] / И.С. Стрельцова // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Астрахани – 2009". Астрахань, 10–16 сентября 2009 г. – С. 28.

S18. Стрельцова, И.С. Конформные скалярные дифференциальные инварианты кривых в пространствах Евклида и Минковского [Текст] / И.С. Стрельцова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2009. – Т. 39. – С. 355–356.

S19. Стрельцова, И.С. Кривые с постоянной $\mathbb{R}$-конформной кривизной [Текст] / И.С. Стрельцова // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2010". Одесса, Украина, 24–30 мая 2010 г. – С. 57.

S20. Стрельцова, И.С. Проективные инварианты три-тканей на плоскости [Текст] / И.С. Стрельцова // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Кисловодске – 2010". Кисловодск, 13–20 сентября 2010 г. – С. 31.

S21. Стрельцова, И.С. Проективные инварианты 4-тканей [Текст] / И.С. Стрельцова // Тезисы докладов Международной школы-конференции для молодежи “Геометрия. Управление. Экономика”. Астрахань, 15–26 августа 2011 г. – С. 23.

S22. Стрельцова, И.С. Дифференциальные инварианты слоений кривых в геометрии Минковского [Текст] / И.С. Стрельцова // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – 2011. – Т. 44. – С. 272–275.